



## Pemodelan Pencegahan Penularan Scabies

Nita Putri Utami<sup>✉</sup>

Tadris Matematika, UIN Imam Bonjol Padang, Indonesia

email: [nitautami@uinib.ac.id](mailto:nitautami@uinib.ac.id)

Received: 30 Juli 2021, Accepted: 29 September 2021, Published: 30 September 2021

### Abstrak

Kesehatan merupakan hal yang paling penting bagi setiap individu, karena jika sakit telah menghampiri individu, apapun jenis penyakitnya menjadi ketakutan yang tak bisa dikalahkan dengan apapun kecuali atas Kuasa Tuhan. Kulit merupakan bagian tubuh manusia yang cukup sensitif terhadap berbagai macam penyakit. Penyakit kulit bisa disebabkan oleh banyak faktor. Scabies merupakan salah satu penyakit kulit yang disebabkan oleh *Sarcoptes scabiei* varian hominis (sejenis kutu, tungau), ditandai dengan keluhan gatal, terutama pada malam hari dan ditularkan melalui kontak langsung atau tidak langsung melalui bekas alastidur atau pakaian. Tujuan penelitian ini adalah memodelkan penularan Scabies dalam bentuk matematika. Metode yang digunakan dengan menggunakan Teori Kestabilan. Berdasarkan hasil dari perhitungan diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu  $(S,I) = (1,0)$  dan  $(S,I) = (\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha+\mu}, -\frac{\mu}{\beta})$ . Jika diperoleh titik kesetimbangan  $(1,0)$  dan jika  $\beta < \alpha + \mu$ , maka titik kesetimbangan  $(1,0)$  stabil asymptotik. Artinya jika terjadi kondisi seperti ini maka dalam waktu yang lama tidak ada penyebaran penyakit atau tidak ada individu yang masuk ke subpopulasi infectives atau dapat disebut titik ini adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika diperoleh titik kesetimbangan  $(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha+\mu}, -\frac{\mu}{\beta})$  maka stabil asymptotik. Artinya kondisi ini dalam waktu yang lama, maka penyakit akan selalu ada dalam populasi tersebut dan selalu ada individu yang masuk ke subpopulasi infectives. Kondisi seperti ini dapat disebut sebagai titik kesetimbangan endemik.

**Kata Kunci:** Pemodelan Penyakit Scabies, Teori Kestabilan.

### Abstract

Health is the most important thing for every individual, because if illness has approached the individual, whatever the disease is, it becomes a fear that cannot be defeated by anything except by the power of God. The skin is a part of the human body that is quite sensitive to various diseases. Skin disease can be caused by many factors. Scabies is a skin disease caused by *Sarcoptes scabiei* variant hominis (a type of tick, mite), characterized by complaints of itching, especially at night and transmitted through direct or indirect contact through former bedding or bedding. clothes. To overcome the transmission of scabies, the purpose of this study is how to mathematically model the prevention of scabies transmission?. The method used is Stability Theory. Based on the results of the calculations obtained two equilibrium points, namely  $(S,I) = (1,0)$  and  $(S,I) = (\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha+\mu}, -\frac{\mu}{\beta})$ . If the equilibrium point is obtained  $(1,0)$  and if  $\beta < \alpha + \mu$ , then the equilibrium point  $(1,0)$  asymptotic. This means that if conditions like this occur, in a long time there will be no spread of disease

✉ Corresponding author

*or no individual will enter the infective subpopulation or it can be called this point is a disease-free equilibrium point. If an equilibrium point is obtained  $(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha+\mu} - \frac{\mu}{\beta})$  then asymptotic stable. This means that this condition for a long time, then the disease will always exist in the population and there will always be individuals who enter the infective subpopulation. This condition can be called the endemic equilibrium point*

**Keywords:** *Scabies disease modeling, Stability Theory*

---

## PENDAHULUAN

Kesehatan merupakan hal yang paling penting bagi setiap individu, karena jika sakit telah menghampiri individu, apapun jenis penyakitnya menjadi ketakutan yang tak bisa dikalahkan dengan apapun kecuali atas Kuasa Tuhan. Kulit merupakan bagian tubuh manusia yang cukup sensitif terhadap berbagai macam penyakit. Penyakit kulit bisa disebabkan oleh banyak faktor. Di antaranya, faktor lingkungan dan kebiasaan hidup sehari-hari. Lingkungan yang sehat dan bersih akan membawa efek yang baik bagi kulit. Demikian pula sebaliknya, lingkungan yang kotor akan menjadi sumber munculnya berbagai macam penyakit[1][2]. Kebersihan merupakan hal yang sangat penting dan harus diperhatikan dalam kehidupan sehari-hari, karena kebersihan akan mempengaruhi kesehatan dan psikis seseorang. Kebersihan itu sendiri sangat dipengaruhi oleh nilai individu dan kebiasaan. Hal-hal yang sangat berpengaruh itu diantaranya kebudayaan, sosial, keluarga, pendidikan, persepsi seseorang terhadap kesehatan, serta tingkat perkembangan[3]. Penderita scabies paling banyak ialah anak usia sekolah antara 5-14 tahun[4]-[6]. Hal tersebut diantaranya karena adanya kegiatan penemuan penderita scabies secara aktif di beberapa desa endemis di wilayah Kabupaten Kendal. Beberapa faktor yang dapat membantu penyebarannya adalah kemiskinan, higiene yang jelek, seksual promiskuitas, diagnosis yang salah, demografi, ekologi dan derajat sensitasi individual[7]. Hal ini disebabkan karena pola kehidupan anak, dan ketergantungan anak pada pengasuh atau orang tua kan masalah kebersihan perorangan dan lingkungan[8], [9].

Scabies dapat menginfeksi semua orang tanpa melihat usia, jenis kelamin, ras, status sosial, maupun higienitas seseorang. Namun insidensinya tinggi pada lingkungan asrama dan Pesantren, panti jompo, atau rumah yang berpenghuni terlalu padat. Kutu scabies tidak dapat hidup lebih dari 3 hari di luar tubuh manusia, tapi dapat bertahan satu bulan pada tubuh manusia. Scabies adalah penyakit kulit yang disebabkan oleh infestasi dan sensitasi terhadap *Sarcoptes scabiei* varian hominis dan produknya [3]. Ada dugaan bahwa setiap siklus 30 tahun terjadi epidemi scabies. Laporan kasus penyakit scabies di berbagai belahan dunia masih sering ditemukan pada keadaan lingkungan yang padat penduduk, status ekonomi rendah, tingkat pendidikan yang rendah dan kualitas hygiene pribadi yang kurang baik. Penyakit scabies dapat ditemukan disemua negara dengan prevalensi yang bervariasi[3][10].

Di Indonesia, kasus skabies cukup tinggi ketika zaman penjajahan Jepang berlangsung. Penduduk kesulitan memperoleh makanan, pakaian dan sarana pembersih tubuh pada saat itu, sehingga kasus scabies cepat menular dari anak-anak hingga dewasa[11]. Sebanyak 915 dari 1008 (90,8%) orang terserang skabies di Desa Sudimoro, Kecamatan Turen, Malang dilaporkan oleh Poeranto tahun 1997. Perbandingan penderita laki-laki dan perempuan adalah 83,7% : 18,3%. Data penderita skabies yang terhimpun dari klinik Penyakit Kulit dan Kelamin, Rumah Sakit Palang Merah Indonesia (RS PMI) Bogor dari tahun 2000 - 2004, masing-masing enam belas pasien (2000); delapan belas pasien (2001); tujuh pasien (2002); delapan pasien (2003) dan lima pasien (2004)[11]. Data-data di atas menunjukkan bahwa penderita skabies di Indonesia masih cukup tinggi. Dari segi epidemiologi perlu pula diperhatikan karena penyakit ini sangat menular sehingga dapat menyebabkan epidemi[12], [13]. Penyakit ini, walaupun tidak berbahaya, memberikan gejala gatal yang cukup hebat, hal ini dapat menurunkan produktivitas kerja penderita[14], [15].

Dan pada akhir-akhir ini penyebaran penularan scabies semakin meluas. Maka tulisan ini akan menjelaskan bagaimana penularan penyakit scabies, pengobatan penyakit scabies dan model matematika pencegahan penularan penyakit scabies serta solusi matematis dan intepretasi solusi matematis kedalam kehidupan sehari-hari.

## METODOLOGI

### 1. FORMULASI MASALAH

Dalam pembentukan model penularan scabies kita tentukan variabel dan parameter yang digunakan sebagai berikut :

Variable

S : jumlah subpopulasi yang rentan tertular penyakit scabies

I : jumlah subpopulasi penderita penyakit scabies

R : jumlah subpopulasi yang telah sembuh dari scabies

T : waktu

Parameter

$\mu$  : tingkat kelahiran dan kematian

$\beta$  : tingkat penularan penyakit

$\gamma$  : tingkat kekebalan akan hilang setelah sembuh

$\delta$  : tingkat kesembuhan

### 2. ASUMSI

a. Populasi dalam sistem dibagi ke dalam tiga subpopulasi

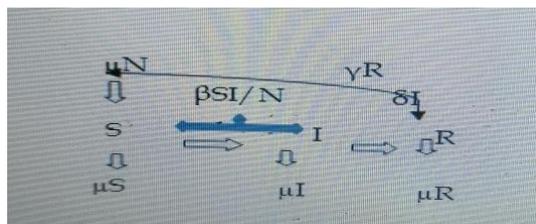
i. Sub populasi yang rentan tertular scabies

ii. Sub populasi penderita, yaitu sub populasi yang telah terinfeksi dan menderita scabies

- iii. sub populasi yang telah sembuh dari scabies dan tidak mengalami kekebalan
- b. Jumlah kelahiran akan sama dengan jumlah kematian dari tiap subpopulasi sehingga populasi tetap.
- c. Hanya ada satu jenis penyakit yang melanda populasi yaitu scabies
- d. Scabies tidak menyebabkan kematian, jadi hanya terjadi kematian alami
- e. Orang yang telah sembuh scabies berkemungkinan menderita scabies lagi atau tidak kebal
- f. Seorang yang rentan tertular scabies dapat menjadi penderita karena adanya kontak langsung

### 3. PEMODELAN MATEMATIKA

Pada pemodelan penularan scabies penulis menggunakan model SIRS sehingga diperoleh:



Gambar 1. Model SIRS

$\mu N$  merupakan jumlah atau banyak individu yang lahir pada populasi, untuk mengetahui nilainya dapat kita tentukan dari tingkat kelahiran dikalikan dengan banyak/ jumlah populasi yang ada. Dan tingkat kelahiran berupa persentase. Setiap individu yang lahir dikategorikan kedalam individu yang rentan tertular scabies karena penyakit scabies bukan merupakan penyakit keturunan.

$\beta SI/N$  merupakan jumlah penularan individu dari yang rentan tertular scabies menjadi penderita scabies yang disebabkan karena adanya interaksi antara yang rentan dengan yang menderita scabies. Nilainya dapat dicari dengan mengalikan jumlah individu yang rentan tertular scabies dengan persentase penularan serta peluang individu tersebut menjadi penderita scabies.

$\mu S$ ,  $\mu I$ , dan  $\mu R$  merupakan jumlah subpopulasi yang meninggal atau mati pada masing-masing subpopulasi misalnya  $\mu S$  merupakan jumlah subpopulasi yang meninggal pada subpopulasi yang rentan tertular scabies yang merupakan mati alami begitu juga pada  $\mu I$  merupakan jumlah subpopulasi **penderita** yang mati secara alami, karena penyakit scabies tidak menyebabkan kematian hanya mengganggu produktivitas kerja.

$\delta I$  merupakan jumlah kesembuhan sub populasi yang awalnya menderita scabies sehingga sembuh dari scabies, untuk menjadi subpopulasi yang sembuh dari

scabies individu yang menderita scabies tidak perlu **berinteraksi** dengan yang sembuh karena sebagaimana kita ketahui setiap individu yang sakit pasti akan berusaha berobat agar memperoleh kesembuhan. Untuk memperoleh nilai ini kita kalikan tingkat kesembuhan dalam bentuk persentase dengan jumlah individu yang penderita scabies.

$\gamma R$  merupakan jumlah subpopulasi yang telah sembuh tidak mengalami **kekebalan** sehingga kembali masuk ke dalam subpopulasi yang rentan tertular scabies. Ini terjadi karena setelah sembuh individu ini berkemungkinan untuk berinteraksi dengan penderita scabies yang menyebabkan yang sembuh berkemungkinan untuk menderita scabies lagi dengan kata lain penyakit ini tidak menyebabkan kekebalan setelah sembuh. Nilainya dapat diperoleh dari perkalian jumlah individu yang sembuh dengan tingkat kehilangan kekebalan individu. Sehingga kita dapat memperhatikan masing-masing variable sebagai berikut :

I. *Susceptible (S)*

Laju perubahan jumlah subpopulasi yang rentan tertular scabies pada waktu tertentu tergantung pada penambahan jumlah individu yang lahir pada populasi karena penyakit ini bukan penyakit keturunan jadi seluruh subpopulasi yang lahir termasuk ke subpopulasi yang rentan ( $\mu N$ ), penambahan individu dari yang sembuh menjadi yang rentan karena penyakit ini tidak menyebabkan kekebalan ( $\gamma R$ ), dan pengurangan terhadap jumlah penularan sub populasi yang rentan sehingga menjadi tertular yang disebabkan karena adanya interaksi antara yang rentan dengan yang penderita scabies ( $\beta SI/N$ ) serta pengurangan terhadap jumlah dari subpopulasi yang rentan tertular scabies yang mati disebabkan karena kematian alami. Sehingga di peroleh :

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta SI/N - \mu S + \Gamma r$$

II. *Infected (I)*

Laju perubahan jumlah subpopulasi penderita scabies pada waktu tertentu tergantung pada penambahan terhadap jumlah penularan sub populasi yang rentan sehingga menjadi tertular yang disebabkan karena adanya interaksi antara yang rentan dengan yang penderita scabies ( $\beta SI/N$ ) serta pengurangan terhadap jumlah dari subpopulasi penderita yang mati yang disebabkan karena kematian alami ( $\mu I$ ) dan pengurangan jumlah subpopulasi yang mengalami kesembuhan dari penderita scabies sehingga menjadi yang sembuh, karena itu suatu kodrat jika seseorang sakit pasti berusaha untuk mengobatinya ( $\delta I$ ). Sehingga kita peroleh

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI/N - \mu I - \delta I$$

III. *Recovered (R)*

Laju perubahan jumlah subpopulasi yang mengalami kesembuhan pada waktu tertentu tergantung pada penambahan jumlah subpopulasi yang mengalami

kesembuhan dari penderita scabies sehingga menjadi yang sembuh, karena itu suatu kodrat jika seseorang sakit pasti berusaha untuk mengobatinya ( $\delta I$ ), pengurangan individu dari yang sembuh menjadi yang rentan karena penyakit ini tidak menyebabkan kekebalan ( $\gamma R$ ) dan pengurangan subpopulasi yang sembuh mengalami kematian secara alami ( $\mu R$ ). sehingga kita punya

$$\frac{dR}{dt} = \delta I - \mu R - \gamma R$$

Jadi model matematika yang kita peroleh sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta SI/N - \mu S + \gamma R$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI/N - \mu I - \delta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I - \mu R - \gamma R$$

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Kita memiliki persamaan berikut dari model matematika diatas

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \beta SI/N - \mu S + \gamma R$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI/N - \mu I - \delta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \delta I - \mu R - \gamma R$$

Untuk memudahkan dalam menganalisis model matematika yang kita peroleh kita bisa memisalkan  $s = \frac{S}{N}$ ,  $i = \frac{I}{N}$ ,  $R = \frac{r}{N}$  dan mengalikan persamaan yang kita peroleh dengan  $\frac{1}{N}$ , sehingga kita peroleh model matematika berikut :

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s + \gamma r$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \mu i - \delta i$$

$$\frac{dr}{dt} = \delta i - \mu r - \gamma r$$

Untuk menganalisis model ini akan kita tentukan titik tetap tak endemik dan titik tetap endemik, serta menentukan kestabilan masing- masing titik tetap tersebut, titik tetap tersebut diperoleh dari turunan pertama sama dengan nol.

### a. Titik tetap tak endemik

Sebelum menentukan titik tetap tak endemik, terlebih dahulu kita harus mengetahui makna titik tetap tak endemik, titik tetap tak endemik adalah untuk jangka waktu yang lama, penderita scabies tidak ada, secara matematis dapat kita katakana bahwa  $i=0$ .

Titik kesetimbangan atau titik tetap diperoleh dari turunan pertama sama dengan nol. Sebagai berikut :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

Pada persamaan  $\frac{dr}{dt}=0$  dan karena  $i=0$  maka dapat kita peroleh sebagai berikut

:

$\frac{dr}{dt} = \delta i - \mu r - \gamma r = 0$ ,  $r = \frac{\delta i}{\mu + \gamma} = 0$  sehingga diperoleh  $r=0$ . Dan pada persamaan  $\frac{ds}{dt} = 0$  serta karena  $i=0$ ,  $r=0$  sehingga kita punya  $\frac{ds}{dt} = \mu - \beta si - \mu s + \gamma r = 0$ ,  $\mu = \mu s$ ,  $s = 1$ . Jadi diperoleh titik tetap tak endemik  $E_0(s,i,r) = (1,0,0)$ .

Selanjutnya kita tentukan kestabilan titik tetap tak endemik dengan memisalkan  $F_1 = \frac{ds}{dt}$ ,  $F_2 = \frac{di}{dt}$ ,  $F_3 = \frac{dr}{dt}$ , maka dapat kita peroleh matriks jacobian dengan bentuk umum sebagai berikut

$$J(s,i,r) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds} & \frac{df_1}{di} & \frac{df_1}{dr} \\ \frac{df_2}{ds} & \frac{df_2}{di} & \frac{df_2}{dr} \\ \frac{df_3}{ds} & \frac{df_3}{di} & \frac{df_3}{dr} \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \mu - \beta si - \mu s + \gamma r$$

$$F_2 = \beta si - \mu i - \delta i$$

$$F_3 = \delta i - \mu r - \gamma r$$

Dengan menentukan entri-entri yang sesuai dengan matriks jacobian diatas dapat kita peroleh matriks jacobian sebagai berikut :

$$J(1,0,0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta & \gamma \\ 0 & \beta - \mu - \delta & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan kestabilan titik tetap tak endemik kita harus menentukan nilai eigen dari matriks jacobian diatas dari persamaan karakteristik yaitu :

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\mu & -\beta & \gamma \\ 0 & \beta - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma - \lambda \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & -\beta & \gamma \\ 0 & \beta - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari persamaan karakteristik diatas diperoleh nilai eigen sebagai berikut  $\lambda_1 = -\mu$ ,  $\lambda_2 = \beta - \mu - \delta$  dan  $\lambda_3 = -\mu - \gamma$ . Titik tetap sistem dikatakan stabil asimtotik apabila nilai- nilai eigen bernilai negatif, dari nilai -nilai eigen kita peroleh  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$  bernilai negatif. Sedangkan  $\lambda_2$  berkemungkinan negatif dan

berkemungkinan positif. Agar sistem stabil asimtotik maka haruslah diperoleh  $\lambda_2$  bernilai negatif. Karena  $\lambda_2 = \beta - \mu - \delta$ . Jadi  $\beta - \mu - \delta < 0$  sehingga diperoleh  $\frac{\beta}{\mu + \delta} < 1$ , jika didefinisikan  $R_0 = \frac{\beta}{\mu + \delta}$  maka diperoleh  $R_0 < 1$ , Dalam penularan scabies,  $R_0$  dapat dinyatakan banyaknya penularan yang dihasilkan oleh seorang penderita scabies, pada saat ia berinteraksi dalam sebuah populasi yang berpotensi terinfeksi.

Jadi dapat kita nyatakan kestabilan titik tetap tak endemik jika tingkat penularan penyakit scabies dibagi dengan jumlah subpopulasi yang lahir/ mati dan tingkat kesembuhan Kurang dari satu.

b. Titik tetap endemik

Setelah kita menentukan titik tetap tak endemik, selanjutnya kita tentukan titik tetap endemik, makna titik tetap endemik adalah bahwa untuk jangka waktu yang lama populasi penularan scabies akan selalu ada dan berpeluang untuk menyebabkan orang lain menjadi penderita scabies, secara matematis mengakibatkan  $i \neq 0$

Titik kesetimbangan atau titik tetap diperoleh dari turunan pertama sama dengan nol. Sebagai berikut :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

Pada persamaan  $\frac{di}{dt} = 0$ , karena  $i \neq 0$  maka dapat kita peroleh sebagai berikut :

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \mu i - \delta i = 0, s = \frac{\mu + \delta}{\beta}$$

Dari persamaan  $\frac{ds}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$  dan dengan mensub  $s = \frac{\mu + \delta}{\beta}$  maka diperoleh:

$$\gamma r - (\mu + \delta)i = \frac{\mu^2 + \mu\delta - \mu\beta}{\beta} \dots\dots\dots (a)$$

$$(\mu + \gamma)r - \delta i = 0 \dots\dots\dots (b)$$

Dari persamaan (a) dan (b) kita mengetahui bahwa persamaan tersebut berbentuk persamaan linear dua variable dimana variabelnya dalam r dan i, sehingga dapat kita selesaikan dengan menggunakan metode gabungan ( substitusi dan eliminasi) dan diperoleh r,i. Untuk memperoleh nilai i dapat kita hilangkan nilai r dengan mengalikan persamaan (a) dengan  $(\mu + \gamma)$  dan persamaan (b) dengan  $\gamma$ . sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$(\mu + \gamma)\gamma r - (\mu + \delta)(\mu + \gamma)i = \frac{\mu^2 + \mu\delta - \mu\beta}{\beta} (\mu + \gamma)$$

$$(\mu + \gamma)\gamma r - \delta\gamma i = 0$$

Dengan menyelesaikan persamaan berikut dengan metode eliminasi sehingga diperoleh :

$$-(\mu^2 + \mu\gamma + \delta\mu + \delta\gamma) + \delta\gamma) I = \frac{\mu^2 + \mu\delta - \mu\beta}{\beta} (\mu + \gamma)$$

$$\mu(-(\mu + \gamma + \delta))i = \mu \left( \frac{(\mu + \delta - \beta)(\mu + \gamma)}{\beta} \right)$$

$$i = \frac{(\mu + \delta - \beta)(\mu + \gamma)}{\beta - (\mu + \gamma + \delta)}$$

jadi diperoleh  $i = \frac{(\mu + \delta - \beta)(\mu + \gamma)}{-\beta(\mu + \gamma + \delta)}$  atau  $i = \frac{(\frac{1}{R_0} - 1)(\mu + \gamma)}{-\beta(\frac{1}{R_0} + \frac{\gamma}{\beta})}$  dan dengan

mensubstitusi nilai I pada persamaan (b) sebagai berikut :

$$\frac{\delta(\mu + \delta - \beta)(\mu + \gamma)}{-\beta(\mu + \gamma + \delta)} - (\mu + \gamma)r = 0$$

$$r = \frac{\delta(\mu + \delta - \beta)(\mu + \gamma)}{-\beta(\mu + \gamma + \delta)(\mu + \gamma)}$$

$$r = \frac{\delta(\mu + \delta - \beta)}{-\beta(\mu + \gamma + \delta)}$$

jadi diperoleh  $r = \frac{\delta(\mu + \delta - \beta)}{-\beta(\mu + \gamma + \delta)}$  atau  $r = \frac{\delta(\frac{1}{R_0} - 1)}{-\beta(\frac{1}{R_0} + \frac{\gamma}{\beta})}$  Sehingga kita peroleh  $E^*$

$$(s^*, i^*, r^*) = \left( \frac{1}{R_0}, \frac{(\frac{1}{R_0} - 1)(\mu + \gamma)}{-\beta(\frac{1}{R_0} + \frac{\gamma}{\beta})}, \frac{\delta(\frac{1}{R_0} - 1)}{-\beta(\frac{1}{R_0} + \frac{\gamma}{\beta})} \right)$$

Selanjutnya kita tentukan kestabilan titik tetap tak endemik dengan memisalkan  $F_1 = \frac{ds}{dt}$ ,  $F_2 = \frac{di}{dt}$ ,  $F_3 = \frac{dr}{dt}$ , maka dapat kita peroleh matriks jacobian dengan bentuk umum sebagai berikut

$$J(s,i,r) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{ds} & \frac{df_1}{di} & \frac{df_1}{dr} \\ \frac{df_2}{ds} & \frac{df_2}{di} & \frac{df_2}{dr} \\ \frac{df_3}{ds} & \frac{df_3}{di} & \frac{df_3}{dr} \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \mu - \beta si - \mu s + \gamma r$$

$$F_2 = \beta si - \mu i - \delta i$$

$$F_3 = \delta i - \mu r - \gamma r$$

Dengan menentukan entri-entri yang sesuai dengan matriks jacobian diatas dapat kita peroleh matriks jacobian sebagai berikut :

$$J(s_1, i_1, r_1) = \begin{bmatrix} \beta i_1 - \mu - \lambda & -\beta s_1 & \gamma \\ \beta i_1 & \beta s_1 - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma - \lambda \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan kestabilan titik tetap tak endemik kita harus menentukan nilai eigen dari matriks jacobian diatas dari persamaan karakteristik yaitu :

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} \beta i_1 - \mu - \lambda & -\beta s_1 & \gamma \\ \beta i_1 & \beta s_1 - \mu - \delta - \lambda & 0 \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

### Interpretasi

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari perhitungan di atas, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu  $(S,I) = (1,0)$  dan  $(S,I) = (\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha + \mu} - \frac{\mu}{\beta})$  Jika diperoleh titik kesetimbangan  $(1,0)$  dan jika  $\beta < \alpha + \mu$ , berdasarkan Proposisi 6 maka titik

kesetimbangan  $(1,0)$  stabil asymptotik. Artinya jika terjadikondisi seperti ini maka dalam waktu yang lama tidak ada penyebaran penyakit atau tidak ada individu yang masuk ke subpopulasi infectives atau dapat disebut titik ini adalah titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika diperoleh titik kesetimbangan  $(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha+\mu} - \frac{\mu}{\beta})$  berdasarkan Proposisi 7 maka stabil asymptotik. Artinya kondisi ini dalam waktu yang lama, maka penyakit akan selalu ada dalam populasi tersebut dan selalu ada individu yang masuk ke subpopulasi infectives. Kondisi seperti ini dapat disebut sebagai titik kesetimbangan endemik.

### Pengujian

Pada suatu desa X terdapat laju penularan penyakit scabies 3000, karena pada desa X jumlah rata-rata masyarakat yang meninggal sama dengan jumlah rata-rata masyarakat yang lahir karena populasi pada desa X dianggap tetap sebanyak 10.000. masyarakat yang sembuh dari penyakit scabies dengan laju 2000. Dari asumsi diatas diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = 10.000 - 3000SI - 10.000S$$

$$\frac{dI}{dt} = 3000SI - 10.000I - 2000I$$

$$\frac{dR}{dt} = 2000I - 10.000R$$

Mengingat  $\frac{dR}{dt}$  redundant karena R tidak muncul pada kedua persamaan lainnya, titik tetap diperoleh apabila  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ .

Dari  $\frac{dI}{dt} = 0$  maka  $3000SI - 10.000I - 2000I = 0$ ,  $I(3000S - 10.000 - 2000) = 0$  sehingga diperoleh  $I = 0$  atau  $S = \frac{12}{3}$ . Dari  $\frac{dS}{dt} = 0$  dan  $I = 0$  maka  $10.000 - 3000SI - 10.000S = 0$ ,  $10.000 - 3000S(0) - 10.000S = 0$  sehingga diperoleh  $S = 1$  yang memberikan disease free equilibrium.  $(S, I) = (1, 0)$  Demikian pula dari  $\frac{dS}{dt} = 0$  dan  $S = 4$  diperoleh  $I = \frac{1}{13} - 5$  yang memberikan endemic equilibrium.  $(S, I) = (\frac{13}{2}, -\frac{64}{13})$

Misalkan :  $f(S, I) = 10.000 - 2000SI - 10.000S$

$$g(S, I) = 2000SI - 3000I - 10.000I$$

Untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan dilakukan linearisasi terhadap persamaan non linear di atas:

$$df/dS (S, I) = d(\mu - \beta SI - \mu S) / dS = -2000I - 10.000$$

$$df/dI (S, I) = d(\mu - \beta SI - \mu S) / dI = -2000S$$

$$dg/dS (S, I) = d(\beta SI - \alpha I - \mu I) / dS = 2000I$$

$$dg/dI (S, I) = d(\beta SI - \alpha I - \mu I) / dI = 2000S - 13000$$

Proposisi 6. Jika  $\beta < \alpha + \mu$ , maka titik kesetimbangan  $(S, I) = (1, 0)$  stabil asymptotik.

Bukti:

Untuk titik kesetimbangan di  $(S,I) = (1,0)$  diperoleh matrik Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -10000 & -2000 \\ 0 & -11.000 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh sistem linear

$$\begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.000 & -2000 \\ 0 & -11.000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} (\lambda I - J) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 10.000 & 2000 \\ 0 & \lambda + 11.000 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 10.000)(\lambda + 11.000) = 0$$

Diperoleh  $\lambda_1 = -10.000$  dan  $\lambda_2 = -11.000$ . Jelas bahwa  $\lambda_1 = -10.000 < 0$  dan diperoleh bahwa nilai  $\lambda_2 = -11.000 < 0$ . Jika  $\beta < \alpha + \mu$  ( $2000 < 13.000$ ), maka menggunakan Teorema 5 (Wiggins, 1990) Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian  $J (f(x))$  mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan  $x$  pada sistem persamaan diferensial non linear  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  diperoleh bahwa titik kesetimbangan  $(S,I) = (1,0)$  stabil asyptotik.

Proposisi 7. Titik kesetimbangan  $(S,I) = (\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{\mu}{\alpha + \mu} - \frac{\mu}{\beta})$  stabil asyptotik.

Bukti:

Untuk titik kesetimbangan di  $(S,I) = (\frac{13}{2}, -\frac{64}{13})$  maka diperoleh matrik Jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{-20.000}{13} & -13.000 \\ \frac{-150.000}{13} & 0 \end{pmatrix} \text{ sehingga diperoleh sistem linear :}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-20.000}{13} & -13.000 \\ \frac{-150.000}{13} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ I \end{pmatrix}$$

Selanjutnya,  $\text{Det} (\lambda I - J) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{20.000}{13} & 13.000 \\ \frac{110.000}{13} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{20.000}{13}\right) (\lambda) - (13.000) \left(\frac{110.000}{13}\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{20.000}{13} \pm \sqrt{\left(\frac{20.000}{13}\right)^2 + 440.000.000}}{2}$$

dengan bagian real  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = -\frac{10.000}{13} < 0$ . Akibatnya menggunakan Teorema 5 (Wiggins, 1990) Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian  $J(f(x))$  mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan  $x$  pada sistem persamaan diferensial non linear  $dx/dt=f(x)$  diperoleh bahwa titik kesetimbangan  $(S,I) = (\frac{13}{2}, -\frac{64}{13})$  stabil asimtotik.

## SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diatas dapat kita ketahui ada dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Penulis sangat mengharapkan selalu terjadi titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $(S,I,R) = (1,0,0)$  artinya individu yang rentan tertular penyakit scabies sama dengan 1 sehingga individu yang tertular penyakit scabies 0 ini bisa terjadi jika tingkat penularan penyakit scabies dibagi dengan jumlah subpopulasi yang lahir/mati dan tingkat kesembuhan Kurang dari satu.

Jadi akibat individu yang tertular penyakit lebih sedikit dari pada laju kesembuhan ditambah laju kelahiran dan laju kematian. Sementara penulis sangat berharap agar tidak terjadi titik kesetimbangan endemik yaitu kondisi dimana selalu ada individu yang tertular scabies. Model penularan penyakit scabies tersebut dipengaruhi oleh tiga komponen sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \alpha I$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I - \mu R$$

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] H. Purwanto, R. Puji Hastuti, J. Kesehatan Lingkungan, P. Kesehatan Tanjung Karang, and J. Keperawatan, "Faktor Risiko Penyakit Skabies di Masyarakat Risk Factors for Scabies in the Community," Online, 2020. [Online]. Available: <http://ejurnal.poltekkes-tjk.ac.id/index.php/JK>
- [2] A. Arifuddin *et al.*, "FAKTOR RISIKO KEJADIAN SCABIES DI RUMAH SAKIT UMUM ANUTAPURA PALU (RISK FACTORS SCABIES AT GENERAL HOSPITAL ANUTAPURA PALU)," 2016.
- [3] A. A. N. Affandi, "The Study of Personal Hygiene and The Existence of Sarcoptes Scabiei in The Sleeping Mats Dust and Its Effects on Scabies Incidence Amongst Prisoners at IIB Class Penitentiary, Jombang District,"

- JURNAL KESEHATAN LINGKUNGAN*, vol. 11, no. 3, p. 165, Jul. 2019, doi: 10.20473/jkl.v11i3.2019.165-174.
- [4] M. Mansyur, A. Ari Wibowo, A. Maria, A. Munandar, A. Abdillah, and A. Femelia Ramadora, "Laporan Kasus Pendekatan Kedokteran Keluarga pada Penatalaksanaan Skabies Anak Usia Pra-Sekolah Family Medicine Approach on Scabies in Pre-School Children," 2006.
- [5] A. Murniati *et al.*, "Pengaruh Penggunaan Sabun Ekstrak Daun Mimba (*Azadirachta indica* A.juss) Terhadap Penyembuhan Lesi Penderita Skabies Grade II The Influence Of Using Extract Neem Leaf (*Azadirachta indica* A.juss) Soap In The Scabies lesions grade II Healing," 2018.
- [6] C. F. Gutri and S. Ked, "Scabies Of Patients With Children Ages 5 Years," 2014.
- [7] I. sari julianti and H. Yusuf, "FAKTOR RISIKO KEJADIAN SCABIES DI WILAYAH KERJA PUSKESMAS DOLO KABUPATEN SIGI RISK FACTORS OF SCABIES IN THE WORKING AREA OF THE SIGI DISTRICT DOLO HEALTH CENTER."
- [8] R. Rompas, A. Y. Ismanto, W. Oroh, P. Studi, I. Keperawatan, and F. Kedokteran, "HUBUNGAN PERAN ORANG TUA DENGAN PERILAKU HIDUP BERSIH DAN SEHAT ANAK USIA SEKOLAH DI SD INPRES TALIKURAN KECAMATAN KAWANGKOAN UTARA," 2018.
- [9] M. Liza, "Faktor-Faktor Yang Berhubungan Dengan Prilaku Masyarakat Yang menggunakan Sanitasi Total Berbasis Masyarakat Dengan Kejadian Diare Kampung Talang Kabupaten Agam Tahun 2012," Universitas Andalas, 2016.
- [10] Lensoni, Yulinar, C. Rahmawati, Meliyana, E. Safitri, and D. Rahmayani, "Pelatihan Pencegahan Penularan Penyakit Scabies dan Peningkatan Hidup Bersih dan Sehat Bagi Santriwan," *Dinamisia: Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat*, vol. 4, no. 3, pp. 470-475, Aug. 2020, doi: 10.31849/dinamisia.v4i3.4519.
- [11] "MASALAH SCABIES DI PESANTREN."
- [12] D. Dwi Nanda, D. Mayasari, and I. Kusuma Dewi, "dan Intan Kusuma Dewi | Penatalaksanaan Holistik Crusted Scabies sebagai Neglected Tropical Disease Medula," 2019.
- [13] M. Safi'i, H. Haryanto, and D. N. Semarang, "SISTEM PAKAR BERBASIS LOGIKA FUZZY UNTUK DETEKSI LEVEL PENYAKIT SCABIES FUZZY BASED EXPERT SYSTEM FOR DETECTION OF SCABIES DISEASE LEVEL," 2017.
- [14] T. P. Griana, J. Biologi, F. Sains, and D. Teknologi, "\376\377\0005\000.\000\000d\000r\000.\000t\000i\000a\000s," 2013.
- [15] A. Arifuddin *et al.*, "FAKTOR RISIKO KEJADIAN SCABIES DI RUMAH SAKIT UMUM ANUTAPURA PALU (RISK FACTORS SCABIES AT GENERAL HOSPITAL ANUTAPURA PALU)," 2016.